Математически турнир „Иван Салабашев“, 2023 г.
Решения на задачите от темата за 10-12 клас

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+24}=2\sqrt{x+15}.$$

Първо решение. При $x \geq 0$ имаме, че

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+24}-2\sqrt{x+15}=$$

$$(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x+3}-2)+(\sqrt{x+24}-5)-2(\sqrt{x+15}-4)=$$

$$(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+24}+5}-\frac{2}{\sqrt{x+15}+4}\right).$$

Понеже $\sqrt{x+15}+4 > \sqrt{x+3}+2 > \sqrt{x}+1$, то изразът във вторите скоби е положителен. Следователно $f(x)=0$ само при $x=1$.

Оценяване. 1 т. за $f(1)=1$, 4 т. за рационализиране и 2 т. за довършване.

Второ решение. При $x>0$ имаме, че

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+24}}-\frac{2}{\sqrt{x+15}}>0.$$

Следователно f е строго растяща функция и значи уравнението $f(x)=0$ има най-много едно решение. Остава да забележим, че $f(1)=0$.

Оценяване. 1 т. за $f(1)=0$, 2 т. за намиране на f', 2 т. за $f'>0$ и 2 т. за извод.

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Ъглополовящите на $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle BDC$ пресичат страните AB и BC в точките C_1 и A_1. Да се докаже, че центърът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ лежи на отсечката A_1C_1 тогава и само тогава, когато $ABCD$ е вписан в окръжност.

Решение. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Имаме, че

$$S_{A_1BI}=\frac{A_1B.r}{2}=A_1B.\frac{S_{ABC}}{a+b+c},\ S_{C_1BI}=\frac{C_1B.r}{2}=C_1B.\frac{S_{ABC}}{a+b+c},$$

$$S_{A_1B_1C}=\frac{A_1B}{a}.\frac{C_1B}{c}S_{ABC}.$$

Тогава

$$I\in A_1C_1 \Leftrightarrow S_{A_1BC_1}=S_{A_1BI}+S_{C_1BI} \Leftrightarrow$$

$$(1)\quad \frac{A_1B+C_1B}{a+b+c}=\frac{A_1B}{a}.\frac{C_1B}{c}.$$

Нека $BD=d$, $AD=e$ и $CD=f$. От свойството на ъглополовящите имаме, че

$$\frac{A_1B}{a}=\frac{d}{d+f},\ \frac{C_1B}{c}=\frac{d}{d+e}.$$

Тогава

$$(1) \Leftrightarrow ad(d+e) + cd(d+f) = d^2(a+b+c) \Leftrightarrow ae + cf = bd.$$

Съгласно теоремата на Птолемей и нейната обратна последното означава $ABCD$ да е вписан в окръжност.

Забележка. Твърдението на задачата следва и от проективната теорема на Паскал и нейната обратна.

Оценяване. 3 т. за (1) и 4 т. за довършване. 4 т., ако е доказана само едната посока на твърдението.

Задача 3. Съществува ли квадратен тричлен $P(x)$ такъв, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ уравнението $\underbrace{P(P(\dots P(x)\dots))}_{n \text{ пъти}} = 1$ има 2^n различни реални корени?

Решение. Съществува, например $P_1(x) = x^2 - 2$. Нека $P_{n+1}(x) = (P_n(x))^2 - 2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогава $P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x))$. С индукция по n ще докажем, че за всяко $a \in (-2, 2)$ уравнението $P_n(x) = a$ има 2^n различни реални корени. При $n = 1$ това е очевидно. Нека твърдението е вярно за някое n. Тогава за $n+1$ то следва от това, че $\sqrt{a+2} \in (0, 2)$ и $P_{n+1}(x) = a \Leftrightarrow P_n(x) = \pm\sqrt{a+2}$.

Оценяване. 1 т. за пример, 3 т. за индукционна хипотеза и 3 т. за довършване.

Задачите от темата за 10.-12. клас са предложени от Николай Николов.