Математически турнир „Иван Салабашев“, 2023 г.
Решения на задачите от темата за 6. клас

1. Намерете числото a, ако a е 25% от b, а b е $\dfrac{2}{7}$ от най-голямото двуцифрено число, записано с различни цифри.

А) 12 **Б)** 7 **В)** 10 **Г)** 8

Отговор: Б). Имаме $b = \dfrac{2}{7}.98 = 28$ и $a = 25\%b = 7$.

2. Пресметнете и подредете по големина $A = \dfrac{7}{3} : \left(-\dfrac{3}{4}\right) + 3\dfrac{5}{9}$, $B = \dfrac{11}{5}.\dfrac{25}{12} : 10$, $C = 0,2.(-5,3 + 7,5)$.

А) $B > C > A$ **Б)** $B > A > C$ **В)** $A > B > C$ **Г)** $A > C > B$

Отговор: Б). Имаме $A = -\dfrac{28}{9} + \dfrac{32}{9} = \dfrac{4}{9}$, $B = \dfrac{11.25.1}{5.12.10} = \dfrac{11}{24}$ и $C = 0,2.2,2 = 0,44 = \dfrac{11}{25}$. Понеже $\dfrac{11}{24} > \dfrac{4}{9} > \dfrac{11}{25}$, то $B > A > C$.

3. Правоъгълен паралелепипед има обем 540 cm^3. Две от измеренията на паралелепипеда са 18 cm и 10 cm. Лицето на пълната повърхнина на паралелепипеда в квадратни сантиметри е равно на:

А) 476 **Б)** 620 **В)** 564 **Г)** 528

Отговор: Г).

4. Успоредник и квадрат има равни обиколки. Ако лицето на успоредника е 42 cm^2, а височините му са 3 cm и 7 cm, намерете лицето на квадрата.

А) 100 cm^2 **Б)** 20,25 cm^2 **В)** 36 cm^2 **Г)** 25 cm^2

Отговор: А). Страните на успоредника са $\dfrac{42}{3} = 14$ cm и $\dfrac{42}{7} = 6$ cm. Тогава страната на квадрата е $40 : 4 = 10$ и лицето му е 100 cm^2.

5. Ако a, b и c са рационални числа, за които $b < 0$, $a + b > 0$ и $a + c < 0$, то кое от дадените неравенства е вярно:

А) $|c| < |b|$ **Б)** $|c| > |b|$ **В)** $|c| = |b|$ **Г)** $|a| > |c|$

Отговор: Б).

6. Правоъгълник е разделен на шест правоъгълника, както е показано на чертежа. За четири от правоъгълниците лицата са 1 cm^2, 2 cm^2, 3 cm^2, и 4 cm^2, а лицата на другите два правоъгълника не са известни и са означени с x и y. Колко е стойността на $x + y$?

1 cm^2	2 cm^2	3 cm^2
4 cm^2	x cm^2	y cm^2

А) 10 cm^2 **Б)** 15 cm^2 **В)** 20 cm^2 **Г)** 25 cm^2

Отговор: В). Тъй като $1.x = 4.2$ получаваме $x = 8$ и от $1.y = 4.3$ намираме $y = 12$. Следователно $x + y = 20$.

7. Градовете A и B са разположени на брега на река. Едновременно от A към B и от B към A с еднаква скорост тръгнали две лодки. Лодките се срещнали след 2 часа между A и B, като мястото на срещата било 10 km по-близко до B отколкото до A. Намерете скоростта на течението на реката.

А) 2 km/h **Б)** 2,5 km/h **В)** 3 km/h **Г)** 3,5 km/h

Отговор: Б). Ако скоростта на лодките е v km/h, а скоростта на течението е x km/h, имаме

$$2(v+x)=2(v-x)+10 \iff 4x=10 \iff x=2,5.$$

8. Дадени са три прости числа p, q и r. Ако $p-q=3r$ и $p+q+r=56$, намерете сбора от цифрите на числото r.

А) 4 **Б)** 2 **В)** 5 **Г)** 7

Отговор: А). След заместване $p=3r+q$ във второто равенство, получаваме $4r+2q=56 \iff 2r+q=28$. Оттук следва, че q е четно число и понеже q е просто, то $q=2$. Тогава $r=13$ и $p=41$.

9. Ако НОД$(n,126)=6$ и НОК$(n,126)=1260$, то n е равно на:

А) 60 **Б)** 75 **В)** 45 **Г)** 20

Отговор: А). От свойството $ab=$НОД(a,b).НОК(a,b) получаваме $126n=1260.6 \iff n=60$.

10. Иван има a лева, а Петър има b лева. Иван дал на Петър половината от парите си, след което Петър дал на Иван половината от парите си. Ако след това Иван има b лева, а Петър има a лева, то:

А) $2b=3a$ **Б)** $3b=2a$ **В)** $a=b$ **Г)** $3b=4a$

Отговор: А. След като Иван дал на Петър половината от парите си, те имали съответно $\frac{1}{2}a$ и $b+\frac{1}{2}a$ лева. След като Петър дал на Иван половината от парите си, те имали съответно $\frac{1}{2}a+\frac{b+\frac{1}{2}a}{2}$ и $\frac{b+\frac{1}{2}a}{2}$. От условието имаме:

$$\frac{b+\frac{1}{2}a}{2}=a \iff b=\frac{3a}{2} \iff 2b=3a.$$

11. Да се намери най-голямото четирицифрено естествено число a със следното свойство

$$S(a+2023)=S(a)-2,$$

където с $S(n)$ се означава сборът от цифрите на естественото число n.

Отговор: 9976. Ще използваме следното свойство: За всеки две естествени числа m и n е изпълнено равенството:

$$S(m+n)=S(m)+S(n)-9t,$$

където t е броя на преносите при събирането $m+n$. Това е така, тъй като при всеки пренос вместо сбор 10 прибавяме 1 към следващия разред, т.е. намаляваме сбора от цифрите на $m+n$ с 9. Тъй като $S(2023)=7$, то $S(a+2023)=S(a)+S(2023)-9$, което означава, че при събирането

$a+2023$ има само един пренос. Ако цифрата на хилядите на a е 9, имаме един пренос и тогава най-голямото число a без пренос е 9976.

12. Дадени са четири различни цели числа a, b, c, d, за които е изпълнено равенството

$$(5-a)(5-b)(5-c)(5-d)=21.$$

Колко различни стойности може да приема сбора $a+b+c+d$?

Отговор: 2. Има само два начина да представим 21 като произведение на 4 различни цели числа: $21=1.(-1).(-3).7$ и $21=1.(-1).3.(-7)$. Тогава числата a, b, c, d (в някакъв ред) са $4, 6, 8, -2$ в първия случай (със сбор 16) и $4, 6, 2, 12$ във втория случай (със сбор 24).

13. Бонбони се продават в пакетчета по 5 бонбона или по 7 бонбона. Намерете най-голямото естествено число n със следното свойство: Колкото и пакетчета бонбони от двата вида да вземем (от един вид може да има нула пакетчета), бонбоните във всички пакетчета не могат да бъдат n.

Отговор: 23. Директно се проверява, че 23 не може да се представи като $5x+7y$ за цели неотрицателни числа x и y. Тъй като $24=2.5+2.7$, $25=5.5+0.7$, $26=1.5+3.7$, $27=4.5+1.7$ и $28=0.5+4.7$, то всички числа, по-големи от 28 могат да се получат като прибавяме пакетчета с пет бонбона.

14. Колко са естествените числа от вида $\overline{2a12b2023c}$, които се делят на 30?

Отговор: 34. От признаците за деление на 2 и на 5 следва, че $c=0$. От признака за деление на 3 получаваме, че $2+a+1+2+b+2+0+2+3+0=12+a+b$ се дели на 3. Следователно $a+b$ се дели на 3. Ако a е някоя от цифрите 1,2,4,5,7,8 за b има точно три възможности (например при $a=5$ възможностите за b са $b=1,4,7$), т.е. общо $6.3=18$ възможности. Ако a е някоя от цифрите 0,3,6,9, то b може да бъде коя да е от тези 4 цифри, т.е. в този случай имаме $4.4=16$ възможности. Общо числата са $18+16=34$.

15. Във всеки от три класа в едно училище има по 20 ученици. Във всеки клас учениците имат номера: $1, 2, \ldots, 19, 20$. По колко различни начина могат да се изберат трима ученици, по един ученик от всеки клас, така че разликата между най-големия от трите номера на учениците и най-малкия от трите номера на учениците да е равна на 2?

Отговор: 216. Нека класовете са A, B и C, най-малкият номер е a, а най-големия е $a+2$. За третия номер има три възможности a, $a+1$ или $a+2$.

- Ако номерата са a, a и $a+2$, то a може да приема стойности от 1 до 18. За всяко фиксирано a имаме три възможности за избор на ученикът с номер $a+2$ – той да е от клас A, клас B или клас C. Следователно в този случай имаме $18.3=54$ избора.

- Ако номерата са a, $a+2$ и $a+2$, то a може да приема стойности от 1 до 18. За всяко фиксирано a имаме три възможности за избор на ученикът с номер a – той да е от клас A, клас B или клас C. Следователно в този случай имаме $18.3=54$ избора.

- Ако номерата са a, $a+1$ и $a+2$, то a може да приема стойности от 1 до 18. За всяко фиксирано a имаме шест възможности за избор на тримата ученици. Следователно в този случай имаме $18.6=108$ избора.

Следователно общо имаме $54+54+108=216$ възможни избора.

Задачите от темата за шести клас са предложени от Емил Колев