Математически турнир „Иван Салабашев“, 2023 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Намерете числената стойност на израза:

$$1,2^2 + 2,4^2 + 3,8^2 + 4,8.1,9.$$

А) 30 **Б)** 29,76 **В)** 30,76 **Г)** 31,74

Отговор: В). Имаме:

$$1,2^2+2,4^2+3,8^2+4,8.1,9 = 2,4^2\left(1,2^2 + 4.1,2.\frac{3,8}{2} + 3,8^2\right) = 2,4^2+(1,2+3,8)^2 = 5,76+25 = 30,76.$$

2. Едночленът M е такъв, че изразът $M + a^4 - \dfrac{a^3}{5}$ се представя като квадрат на двучлен.

Стойността на M за $a = -5$ е:

А) $0,25$ **Б)** $-0,2$ **В)** 1 **Г)** $2,5$

Отговор: А). При $M = \dfrac{a^2}{100}$ имаме, че изразът е равен на $\left(a^2 - \dfrac{a}{10}\right)^2$. При $a = -5$ получаваме $M = 0,25$.

3. Най-малкото общо кратно на естественото число n и 18 е 180, а най-големия общ делител на n и 45 е 15. Сумата от цифрите на числото n е:

А) 3 **Б)** 8 **В)** 6 **Г)** 12

Отговор: В). Възможностите за НОК$(n, 18) = 180$ са $n = 20, 60, 180$, а възможностите за НОД$(n, 45) = 15$ са $n = 15, 30, 60, 75, \ldots$. Следователно $n = 60$ със сбор от цифрите 6.

4. По колко начина можем да разделим числата $1, 2, \ldots, 13, 14$ на седем двойки, така че във всяка двойка по-голямото число е поне два пъти по-голямо от по-малкото?

А) 132 **Б)** 144 **В)** 120 **Г)** 108

Отговор: Б). Очевидно числата от 8 до 14 трябва да са в различни двойки. Следователно във всяка двойка се среща едно от числата $8, 9, \ldots, 14$. Тогава 7 може да бъде в двойка само с 14. Числото 6 може да е в двойка само с 12 или 13.

Ако 6 е в двойка с 12, то 5 може да е в двойка с 10, 11 или 13. След това за 1,2,3,4 няма никакви ограничения. В този случай имаме $3.4! = 72$ начина.

Ако 6 е в двойка с 13, аналогично намираме още $3.4! = 72$ начина. Следователно общо начините са $72 + 72 = 144$.

5. Числената стойност на израза

$$A = 88a^3 - 132a^2 + 66a - 11$$

при $a = \dfrac{6}{11}$ е:

А) $\dfrac{1}{125}$ **Б)** $\dfrac{1}{121}$ **В)** $\dfrac{1}{50}$ **Г)** $\dfrac{3}{50}$

Отговор: Б). Имаме:
$$A = 11(8a^3 - 12a^2 + 6a - 1) = 11\,(2a-1)^3$$
и при $a = \dfrac{6}{11}$ намираме $A = 11\left(\dfrac{12}{11} - 1\right)^3 = 11.\dfrac{1}{11^3} = \dfrac{1}{121}$.

6. Петър пътува от къщи към летището. Той изминал 35 km през първия час, но пресметнал, че ако продължи със същата скорост ще закъснее с 1 час за полета. Затова увеличил скоростта си с 15 km/h за останалия път и пристигнал 30 минути по-рано. Пътят, измерен в километри, от къщата на Петър до летището е:

А) 140 **Б)** 175 **В)** 245 **Г)** 210

Отговор: Г). Нека S е търсеното разстояние. Ако пътува със скорост 35 km/h ще измине разстоянието за $\dfrac{S}{35}$ часа. Реалното време до летището е $1 + \dfrac{S-35}{50}$, което е с 1,5 часа по-малко от първото време. Следователно
$$\frac{S}{35} - \left(1 + \frac{S-35}{50}\right) = 1,5 \iff S = 210 \text{ km}.$$

7. Да означим с L_{17} най-малкото общо кратно на числата $1, 2, \ldots, 17$. Сборът
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17}$$
е записан във вида $\dfrac{a}{L_{17}}$. Остатъкът при деление на a със 17 е равен на:

А) 5 **Б)** 7 **В)** 9 **Г)** 1

Отговор: А). Имаме $L_{17} = 16.9.5.7.11.13.17$ и след привеждане към най-малък общ знаменател всички събираеми в числителя се делят на 17 с изключение на 16.9.5.7.11.13. Това число по модул 17 дава:
$$(-1).9.35.11.13 \equiv (-1).9.1.11.13 \equiv 9.11.(-13) \equiv 9.11.4 \equiv 2.11 \equiv 5 \pmod{17}.$$

8. Нека x и y са цели числа, за които $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{xy} = 1$. Стойността на $x + y$ е:

А) 7 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 6

Отговор: Г). Имаме $x \neq 0$, $y \neq 0$ и след умножение с xy равенството придобива вида:
$$xy = x + y + 2 \iff (x-1)(y-1) = 3.$$
Без ограничение $x - 1 = \pm 1$, $y - 1 = \pm 3$, като от $x \neq 0$ следва $x - 1 = 1$ (т.е. $x = 2$) и тогава $y - 1 = 3$ (т.е. $y = 4$). Следователно $x + y = 2 + 4 = 6$.

9. В успоредник $ABCD$ точка P е произволна вътрешна точка върху страната CD, а Q е произволна вътрешна точка върху отсечката AP. Нека M е пресечната точка на BP и CQ. Ако лицата на $\triangle BQM$ и $\triangle DQP$ са съответно S_1 и S_2, то винаги е изпълнено:

А) $S_1 = S_2$ **Б)** $S_1 < S_2$ **В)** $S_1 > S_2$ **Г)** $S_2 = 2S_1$

Отговор: В). Имаме:

$$\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABQ} + S_{BQM} + S_{PQM} \text{ и } \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABQ} + S_{DQP} + S_{PQM} + S_{PMC}$$

и следователно

$$S_{BQM} = S_{DQP} + S_{PMC} > S_{DQP}.$$

10. Във всяка клетка на таблица 5×5 е записана 0 или 1, така че в клетките на всеки квадрат 2×2 има точно три равни числа. Сумата на числата в таблицата може да е най-много:

А) 19 **Б)** 23 **В)** 17 **Г)** 21

Отговор: Г). Да разделим квадрата 4×4 в горния ляв ъгъл на таблицата на четири непресичащи се квадрата 2×2. Сумата на числата в тези квадрати не надвишава $4.3 = 12$, и ако във всички останали 9 клетки има 1, то сумата не надвишава $12 + 9 = 21$. Това число се достига, ако запишем нули в клетките $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$ и $(4, 4)$.

11. Да се намери сборът на всички цели числа a, за които $a^2 + a + 3$ е квадрат на цяло число.

Отговор: -1. Нека $a^2 + a + 3 = b^2$, където b е цяло число. След умножение с 4 получаваме:

$$(2a + 1)^2 + 11 = 4b^2 \iff (2a + 1 - 2b)(2a + 1 + 2b) = -11.$$

Следователно имаме следните случаи:
$2a + 1 - 2b = 1, 2a + 1 + 2b = -11$ с решение $a = -3$ и $b = -3$;
$2a + 1 - 2b = -1, 2a + 1 + 2b = 11$ с решение $a = 2$ и $b = 3$;
$2a + 1 - 2b = -11, 2a + 1 + 2b = 1$ с решение $a = -3$ и $b = 3$;
$2a + 1 - 2b = 11, 2a + 1 + 2b = -1$ с решение $a = 2$ и $b = -3$.
Следователно има само две възможни стойности за a: $a = 2, a = -3$ със сбор -1.

12. Нека a, b и c са рационални числа, за които $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Да се намери най-малката стойност на израза $(a + 1)(b + 1) + c$.

Отговор: -3. Ако $A = (a + 1)(b + 1) + c$ имаме

$$2A = 2ab+2a+2b+2+2c = a^2+b^2+c^2+2ab+2a+2b+2+2c-6 = (a+b+1)^2+(c+1)^2-6 \geq -6,$$

т.е. $A \geq -3$. Равенство се достига при $a = -2$, $b = 1$ и $c = -1$.

13. Да се намери броят на подмножествата на множеството $\{1, 2, \ldots, 13\}$ с два или повече елемента, които имат нечетна сума на елементите си.

Отговор: 4089. Да разгледаме всички подмножества на даденото множество. Тъй като $1 + 2 + 3 + \cdots + 13 = 91$, то допълнението на всяко подмножество с нечетна сума на елементите е множество с четна сума на елементите. Следователно множествата с нечетна сума на елементите са точно половината от всички 2^{13} подмножества на $\{1, 2, \ldots, 13\}$, т.е. $2^{12} = 4096$. Тъй като множествата с един елемент и нечетна сума са 7 (нечетните числа от 1 до 13), то търсеният брой е $4096 - 7 = 4089$.

14. Да се намери броят на двойките (a, b) от естествени числа, такива че $a < b$ и

$$ab + 63 = 20.\text{НОК}(a, b) + 12.\text{НОД}(a, b).$$

Отговор: 1. Нека $x = \text{НОК}(a, b)$ и $y = \text{НОД}(a, b)$. Тъй като $ab = xy$ имаме

$$xy + 63 = 20x + 12y \iff (x - 12)(y - 20) = 177.$$

Понеже $177 = 3.59$ и $x > y$ имаме два случая:
$x - 12 = 59$ и $y - 20 = 3$, т.е. $x = 71$ и $y = 23$, което не е решение понеже 23 не дели 71;
$x - 12 = 177$ и $y - 20 = 1$, т.е. $x = 189$ и $y = 21$, откъдето намираме $a = 21$, $b = 189$.

15. Дадено е крайно множество от точки, четири от които са A, B, C и D. Първоначално Петър построил всички отсечки с краища дадените точки. След това Иван изтрил част от отсечките, поне единия край на които е A, B, C или D така, че от всяка от точките A, B, C или D излизали точно по две отсечки. В крайна сметка се оказало, че общият брой отсечки е 49. Колко от тях имат и двата си края измежду точките A, B, C или D?

Отговор: 4. Ако останалите точки са 11 или повече, то отсечките са поне 55, противоречие. Ако са 9 или по-малко, то отсечките между тях са най-много 36 и заедно с най-много 8 отсечки от A, B, C и D няма как да имаме 45 отсечки. Следователно останалите точки са 10 и между тях има 45 отсечки. Останалите 4 отсечки трябва да осигуряват общо 8 края на отсечките от A, B, C и D, а това е възможно само когато тези 4 отсечки свързват някои от точките A, B, C и D.

Задачите от темата за седми клас са предложени от Александър Иванов.