СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“ - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

2 декември 2023 г.

Тема за 7. клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачите от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 4 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 23.12.2022 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

1. Намерете числената стойност на израза:

$$1,2^2+2,4^2+3,8^2+4,8.1,9.$$

А) 30 **Б)** 29,76 **В)** 30,76 **Г)** 31,74

2. Едночленът M е такъв, че изразът

$$M+a^4-\frac{a^3}{5}$$

се представя като квадрат на двучлен. Стойността на M за $a=-5$ е:

А) $0,25$ **Б)** $-0,2$ **В)** 1 **Г)** $2,5$

3. Най-малкото общо кратно на естественото число n и 18 е 180, а най-големия общ делител на n и 45 е 15. Сумата от цифрите на числото n е:

А) 3 **Б)** 8 **В)** 6 **Г)** 12

4. По колко начина можем да разделим числата $1,2,\dots,13,14$ на седем двойки, така че във всяка двойка по-голямото число е поне два пъти по-голямо от по-малкото?

А) 132 **Б)** 144 **В)** 120 **Г)** 108

5. Числената стойност на израза

$$A=88a^3-132a^2+66a-11$$

при $a=\frac{6}{11}$ е:

А) $\frac{1}{125}$ **Б)** $\frac{1}{121}$ **В)** $\frac{1}{50}$ **Г)** $\frac{3}{50}$

6. Петър пътува от къщи към летището. Той изминал 35 km през първия час, но пресметнал, че ако продължи със същата скорост ще закъснее с 1 час за полета. Затова увеличил скоростта си с 15 km/h за оставалия път и пристигнал 30 минути по-рано. Пътят, измерен в километри, от къщата на Петър до летището е:

А) 140 **Б)** 175 **В)** 245 **Г)** 210

7. Да означим с L_{17} най-малкото общо кратно на числата $1,2,\dots,17$. Сборът

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}$$

е записан във вида $\frac{a}{L_{17}}$.
Остатъкът при деление на a със 17 е равен на:

А) 5 **Б)** 7 **В)** 9 **Г)** 1

8. Нека x и y са цели числа, за които

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=1.$$

Стойността на $x+y$ е:

А) 7 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 6

9. В успоредник $ABCD$ точка P е произволна точка върху страната CD, а Q е произволна точка върху отсечката AP. Нека M е пресечната точка на BP и CQ (P и Q са вътрешни съответно за CD и AP). Ако лицата на $\triangle BQM$ и $\triangle DQP$ са съответно S_1 и S_2, то винаги е изпълнено:

А) $S_1 = S_2$ **Б)** $S_1 < S_2$

В) $S_1 > S_2$ **Г)** $S_2 = 2S_1$

10. Във всяка клетка на таблица 5×5 е записана 0 или 1, така че в клетките на всеки квадрат 2×2 има точно три равни числа. Сумата на числата в таблицата може да е наймного:

А) 19 **Б)** 23 **В)** 17 **Г)** 21

11. Да се намери сборът на всички цели числа a, за които $a^2 + a + 3$ е квадрат на цяло число.

12. Нека a, b и c са рационални числа, за които $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Да се намери най-малката стойност на израза $(a + 1)(b + 1) + c$.

13. Да се намери броят на подмножествата на множеството $\{1, 2, \ldots, 13\}$ с два или повече елемента, които имат нечетна сума на елементите си.

14. Да се намери броят на двойките (a, b) от естествени числа, такива че $a < b$ и

$$ab + 63 = 20.\text{НОК}(a, b) + 12.\text{НОД}(a, b).$$

15. Дадено е крайно множество от точки, четири от които са A, B, C и D. Първоначално Петър построил всички отсечки с краища дадените точки. След това Иван изтрил част от отсечките, поне единия край на които е A, B, C или D така, че от всяка от точките A, B, C или D излизали точно по две отсечки. В крайна сметка се оказало, че общият брой отсечки е 49. Колко от тях имат и двата си края измежду точките A, B, C или D?