Математически турнир „Иван Салабашев“, 2023 г.
Решения на задачите от темата за 8-9. клас

1. Ако $3x^2 - 4x + 1 = 0$, то най-голямата възможна стойност на израза $4 - 3x$ е:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Отговор: В). Даденото в условието уравнение се разлага на $(3x-1)(x-1) = 0$, откъдето $x = 1$ или $x = 1/3$. Директно заместване в $4 - 3x$ дава, че единствените стойности на този израз са 1 и 3. Измежду тях по-голямата е 3.

2. Кое от числата е точен квадрат:

А) $6^{22}.10^{23}.21^{24}.35^{25}$ **Б)** $6^{22}.10^{23}.21^{25}.35^{24}$

В) $6^{21}.10^{23}.21^{25}.35^{27}$ **Г)** $6^{21}.10^{22}.21^{22}.35^{23}$

Отговор: В). Всяко от числата в каноничното си разлагане се записва като $2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{\delta}$. При това, за числото $6^x.10^y.21^z.35^t$ имаме връзките:

$$\alpha = x + y; \quad \beta = x + z; \quad \gamma = y + t; \quad \delta = z + t.$$

Едно число, записано в горния каноничен вид е точен квадрат тогава и само тогава, когато $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ са всичките четни. Лесно се съобразява, че това е еквивалентно на x, y, z, t да са от една и съща четност. Това е в сила единствено при отговор В).

3. Емил хвърля стандартен зар 2 пъти, а Сашо – само веднъж. Вероятността, числото хвърлено от Сашо да надвишава сбора на числата, хвърлени от Емил е:

А) $\dfrac{5}{54}$ **Б)** $\dfrac{35}{216}$ **В)** $\dfrac{35}{72}$ **Г)** $\dfrac{35}{54}$

Отговор: А). Сашо може да хвърли с по вероятност $\frac{1}{6}$ всяко от числата $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Емил хвърля с вероятност $\frac{1}{36}$ всяка от наредените двойки (a, b), където и двете числа са между 1 и 6. Ако Сашо хвърли 1 или 2, то той няма как да спечели. Ако хвърли 3, единствен шанс да спечели е, ако Емил хвърли $(1, 1)$, т.е., вероятността за печалба е $\frac{1}{36}$. Ако Сашо хвърли 4, то той печели при хвърляния от Емил на $\{(1, 1); (2, 1); (1, 2)\}$, което е с вероятност $\frac{3}{36}$. Ако Сашо хвърли 5, то той печели при хвърляния от Емил на $\{(1, 1); (2, 1); (3, 1); (1, 2); (2, 2); (1, 3)\}$, което е с вероятност $\frac{6}{36}$. Ако Сашо хвърли 6, то той печели при хвърляния от Емил на

$$\{(1, 1); (2, 1); (3, 1); (4, 1); (1, 2); (2, 2); (3, 2); (1, 3); (2, 3); (1, 4)\},$$

което е с вероятност $\frac{10}{36}$. Окончателно, Сашо печели с вероятност

$$\frac{1}{6}\left(0 + 0 + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{6}{36} + \frac{10}{36}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{36} = \frac{5}{54}.$$

4. Точките B, D и F са среди съответно на страните PQ, QR и RP на равностранен триъгълник PQR. Във вътрешността на триъгълник PQR са избрани точки A, C и E така, че $ABCDEF$ е правилен шестоъгълник. Ако лицето на петоъгълника $QBAFR$ е равно на 1, то лицето на триъгълник PQR е равно на:

А) $\dfrac{7}{6}$ **Б)** $\dfrac{6}{5}$ **В)** $\dfrac{5}{4}$ **Г)** $\dfrac{4}{3}$

Отговор: Б). Ясно е, че PBF, BQD, DFR и FBD са еднакви равностранни триъгълници и нека лицето на всеки от тях е S. Тъй като $\angle BAF = 120^\circ$ и $AB = AF$, то A е център на триъгълника PBF. Лицето на петоъгълника $QBAFR$ е равно на $3S + \dfrac{S}{3} = \dfrac{10}{3}S$ и следователно $S = \dfrac{3}{10}$. Тъй като лицето на PQR е равно на $4S$, то отговорът е $4S = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$.

5. На един остров, жителите или винаги казвали истината или винаги лъжели. В продължение на една седмица, всеки ден се провеждали томболи, като никой не спечелил повече от веднъж. На следващия понеделник, седемте победители били извикани на сцена за да получат наградите си. Всеки един от спечелилите в четвъртък, петък, събота, и неделя казал:

„Измежду спечелилите преди мен поне трима са лъжци!“

Каква е вероятността победителя от неделя да е казал истината?

А) не може да се определи **Б)** 0%

В) 50% **Г)** 100%

Отговор: Г). Да допуснем, че победителя в неделя е излъгал. Тогава преди него има най-много двама лъжци-победители и значи няма как измежду победителите в четвъртък, петък или събота да има някой, казващ истината. Но тогава наистина има поне 3-ма лъжци преди победителя от неделя и той е казал истината – противоречие с допускането. Следователно, победителя в неделя винаги казва истината. Такава ситуация е възможна: например първите трима победители са всичките лъжци, а останалите 4-ма винаги казват истината.

6. Броят на естествените числа n за които $2^n + 2023^n$ е точен квадрат е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

Отговор: Б). Очевидно $n = 1$ е решение, тъй като $2 + 2023 = 2025 = 45^2$. Да допуснем, че уравнението приема решение при $n > 1$. Ако n е четно, то $2^n \equiv 2023^n \equiv 1 \pmod 3$ и значи $2^n + 2023^n \equiv 2 \pmod 3$, което не е квадратичен остатък. Ако $n \geq 3$ е нечетно, то $2^n \equiv 0 \pmod 4$, докато $2023^n \equiv 3 \pmod 4$ и значи $2^n + 2023^n \equiv 3 \pmod 4$, което отново не е квадратичен остатък.

7. Даден е правоъгълник $ABCD$. Точка E е средата на страната AB, а точка F лежи върху страната BC. Пресечната точка на CE и DF е означена с G, като знаем че $CF = CG$ и $DE = DG$. Големината на $\angle CEF$ е:

А) 15° **Б)** 18° **В)** 24° **Г)** 30°

Отговор: Б). Да означим търсеният ъгъл с γ. От даденото по условие $CF = CG$ и $DE = DG$ получаваме, че $\angle DEG = \angle DGE = \angle CGF = \angle CFG$, откъдето точките C, D, E, F лежат върху една окръжност. Оттук, $\angle CDF = \angle CEF = \gamma$ и $\angle CED = \angle CFD = 90^\circ - \gamma$. От равнобедреността на $\triangle CFG$ получаваме, че $\angle FCG = 2\gamma$, а от равнобедреността на $\triangle DEG$ получаваме, че $\angle EDG = 2\gamma$. Тъй като E е среда на AB, то триъгълник DCE също е равнобедрен и значи $\angle EDC = \angle ECD$, което е равносилно на $3\gamma = 90^\circ - 2\gamma$ или $\gamma = 18^\circ$.

8. Нека $n > 1000$ е най-малкото естествено число за което НОД$(63, n + 120) = 21$ и НОД$(n + 63, 120) = 60$. Колко е сборът от цифрите на числото n?

А) 18 **Б)** 15 **В)** 24 **Г)** 21

Отговор: А). От дадените равенство е ясно, че n се дели на 3 и нека $n = 3m$, където $m \geq 334$. Тогава НОД$(21, m + 40) = 7$ и НОД$(m + 21, 40) = 20$

Числото $m+21$ се дели на 20, но не се дели на 40. Следователно $m+21=(2k+1)20=40k+20$, т.е. $m=40k-1$. Освен това $m+40=40k+39$ се дели на 7, но не се дели на 3. Следователно k не се дели на 3 и $5k+4$ се дели на 7, т.е. $k\equiv 2 \pmod 7$. Следователно $m=40(7t+2)-1=280t+79$ и понеже най-малкото t, за което това число е ≥ 334 е $t=2$ получаваме $m=560+79=639$, откъдето $n=3m=1917$ със сбор на цифрите 18.

9. Нека (a,b,c,d) е наредена четворка от не непременно различни цели числа, всяко от които е от множеството $\{0,1,2,3\}$. За колко такива четворки числото $|ad-bc|$ е нечетно?

А) 64 **Б)** 96 **В)** 128 **Г)** 48

Отговор: Б). Тъй като $|ad-bc|$ е нечетно, то числата ad и bc са с различна четност. Броят на двойките числа от множеството $\{0,1,2,3\}$ е 16. Произведение на две числа от $\{0,1,2,3\}$ е нечетно когато и двете числа са нечетни. Това става в четири случая: $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$ и $(3,3)$. Във всички останали 12 случая това произведение е четно. Тъй като за четностите на ad и bc има две възможности, то търсеният брой е $2.4.12=96$.

10. В правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C е построена височината CH, $H\in AB$. Точка S от страната BC е такава, че $AH=HS$ и $HS\perp BC$. Колко от произведенията $BH.BC$, $CH.AB$, $BS.AB$ и $HS.AB$ са равни на $2S$, където S е лицето на триъгълник ABC?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Отговор: В). Тъй като $\triangle AHC\equiv\triangle HSB$, то $BH=AC$ и $BS=CH$. Тогава

$$BH.BC=AC.BC=2S, CH.AB=2S, BS.AB=CH.AB=2S.$$

Тъй като $HS<CH$, то $HS.AB<CH.AB<2S$.

11. За всяко естествено число $n\geq 2$ с $f(n)$ означаваме най-малкото естествено число, което има точно n положителни делители. Например $f(2)=2$, $f(3)=4$, $f(5)=16$. Намерете $f(8)$.

Отговор: 24. Естествено число с 8 делители има едно от следните разлагания: p^7, $p^3.q$ или $p.q.r$, където p, q и r са различни прости числа. От всеки вид най-малките числа са съответно: $2^7=128$, $2^3.3=24$ и $2.3.5=30$, като най-малкото е 24.

12. Във всяка клетка на таблица 3×3 е записано по едно естествено число така, че сборовете на числата във всеки от трите реда са равни и сборовете на числата във всяка от трите колони са равни. Ако $a+b=18$ на колко е равно числото x?

5		x
a	7	
	b	11

Отговор: 8. От условието е ясно, че сборът на числата по редове и колони е един и същ. Тъй като $5+a=b+11$ (от равенството на сборовете в лявата колона и долния ред), то $a=b+6$ и от $a+b=18$ намираме $a=12$ и $b=6$. Сега от $7+b=5+x$ (от равенството на сборовете в средната колона и горния ред) получаваме $x=8$.

13. Да се намери най-голямата стойност на израза $12ab+5b^2$, където a и b са реални числа, за които $a^2+b^2=1$.

Отговор: 9.

14. Едно петцифрено число се нарича *добро*, ако за него са изпълнени следните свойства:

- В десетичния запис на числото се използвани само цифрите 1, 2 и 3.

- Първата и последната цифра на числото са различни.
- Всеки две съседни цифри на числото са различни.

Намерете броя на добрите числа.

Отговор: 30. Нека a_n, $n \geq 2$ е броят на n цифрените числа с горните условия и тогава $a_2 = 3.2 = 6$. Лесно се вижда, че при $n \geq 3$ е изпълнено $3.2^{n-1} = a_n + a_{n-1}$, защото 3.2^{n-1} е броят на думите, ако не се грижим за първата и последната цифра да са различни, а когато първата и последнат ацифра са равни, този брой е a_{n-1}. Сега пресмятаме:

$$a_4 = 24 - a_3 = 18, a_5 = 48 - a_4 = 30.$$

15. Да се намери броят на естествените числа $n \leq 1000$ за които сборът

$$\left[\frac{998}{n}\right] + \left[\frac{999}{n}\right] + \left[\frac{1000}{n}\right]$$

не се дели на 3. (За реално число x с $[x]$ се означава цялата част на числото x.)

Отговор: 22.

Задачите от темата за 8-9 клас са предложени от