СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“ - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“

2 декември 2023 г.

Тема за 8-9. клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачите от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 4 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev/ след 23.12.2022 г.

Журито Ви пожелава приятна работа.

1. Ако $3x^2 - 4x + 1 = 0$, то най-голямата възможна стойност на израза $4 - 3x$ е:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

2. Кое от числата е точен квадрат:

А) $6^{22}.10^{23}.21^{24}.35^{25}$ **Б)** $6^{22}.10^{23}.21^{25}.35^{24}$

В) $6^{21}.10^{23}.21^{25}.35^{27}$ **Г)** $6^{21}.10^{22}.21^{22}.35^{23}$

3. Емил хвърля стандартен зар 2 пъти, а Сашо – само веднъж. Вероятността, числото хвърлено от Сашо да надвишава сбора на числата, хвърлени от Емил е:

А) $\frac{5}{54}$ **Б)** $\frac{35}{216}$ **В)** $\frac{35}{72}$ **Г)** $\frac{35}{54}$

4. Точките B, D и F са среди съответно на страните PQ, QR и RP на равностранен триъгълник PQR. Във вътрешността на триъгълник PQR са избрани точки A, C и E така, че $ABCDEF$ е правилен шестоъгълник. Ако лицето на петоъгълника $QBAFR$ е равно на 1, то лицето на триъгълник PQR е равно на:

А) $\frac{7}{6}$ **Б)** $\frac{6}{5}$ **В)** $\frac{5}{4}$ **Г)** $\frac{4}{3}$

5. На един остров, жителите или винаги казвали истината или винаги лъжели. В продължение на една седмица, всеки ден се провеждали томболи, като никой не спечелил повече от веднъж. На следващия понеделник, седемте победители били извикани на сцена за да получат наградите си. Всеки един от спечелилите в четвъртък, петък, събота, и неделя казал:

„Измежду спечелилите преди мен поне трима са лъжци!“

Каква е вероятността победителя от неделя да е казал истината?

А) не може да се определи **Б)** 0%

В) 50% **Г)** 100%

6. Броят на естествените числа n за които $2^n + 2023^n$ е точен квадрат е:

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

7. Даден е правоъгълник $ABCD$. Точка E е средата на страната AB, а точка F лежи върху страната BC. Пресечната точка на CE и DF е означена с G, като знаем че $CF = CG$ и $DE = DG$. Големината на $\sphericalangle CEF$ е:

А) 15° **Б)** 18° **В)** 24° **Г)** 30°

8. Нека $n > 1000$ е най-малкото естествено число за което НОД$(63, n + 120) = 21$ и НОД$(n + 63, 120) = 60$.

Колко е сборът от цифрите на числото n?

А) 18 **Б)** 15 **В)** 24 **Г)** 21

9. Нека (a, b, c, d) е наредена четворка от не непременно различни цели числа, всяко от които е от множеството $\{0, 1, 2, 3\}$. За колко такива четворки числото $|ad - bc|$ е нечетно?

А) 64 **Б)** 96 **В)** 128 **Г)** 48

10. В правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C е построена височината CH, $H \in AB$. Точка S от страната BC е такава, че $AH = HS$ и $HS \perp BC$. Колко от произведенията $BH.BC$, $CH.AB$, $BS.AB$ и $HS.AB$ са равни на $2S$, където S е лицето на триъгълник ABC?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

11. За всяко естествено число $n \geq 2$ с $f(n)$ означаваме най-малкото естествено число, което има точно n положителни делители. Например $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(5) = 16$.
Намерете $f(8)$.

12. Във всяка клетка на таблица 3×3 е записано по едно естествено число така, че сборовете на числата във всеки от трите реда са равни и сборовете на числата във всяка от трите колони са равни.

5		x
a	7	
	b	11

Ако $a + b = 18$ на колко е равно числото x?

13. Да се намери най-голямата стойност на израза $12ab + 5b^2$, където a и b са реални числа, за които $a^2 + b^2 = 1$.

14. Едно петцифрено число се нарича *добро*, ако за него са изпълнени следните свойства:

- В десетичния запис на числото се използвани само цифрите 1, 2 и 3.
- Първата и последната цифра на числото са различни.
- Всеки две съседни цифри на числото са различни.

Намерете броя на добрите числа.

15. Да се намери броят на естествените числа $n \leq 1000$ за които сборът

$$\left[\frac{998}{n}\right] + \left[\frac{999}{n}\right] + \left[\frac{1000}{n}\right]$$

не се дели на 3. (За реално число x с $[x]$ се означава цялата част на числото x.)