Секция "Изток" – СМБ

ВЕЛИКДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 25.04.2026 г.

10 клас

Време за работа: 90 минути

1. При $x \neq \pm 3$ и $x \neq 0$ изразът $A = \left(\dfrac{3x+9}{5x^2-15x} + 3x + 9\right).\dfrac{5x}{x+3} - \dfrac{3}{x-3}$ е тъждествено равен на

А) $\dfrac{3\left(x^2-5x+5\right)}{x-3}$ Б) $15x$ В) $5x^2$ Г) 15

2. Уравнението $\dfrac{x-1}{x^2+x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{x+1} - 1$ е еквивалентно на:

А) $3x+9=0$ Б) $x^2-2x-3=0$ В) $100x-300=0$ Г) $x^2-2x+3=0$

3. В $\triangle ABC$ CM е медиана $(M \in AB)$. Точките P и Q са такива, че $\overrightarrow{CP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CQ} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

За насочените отсечки $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$ е вярно, че:

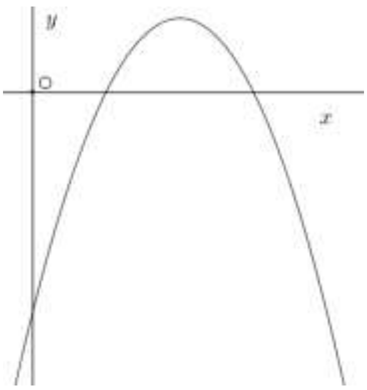
А) $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AP}$ Б) $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AP}$ В) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$ са неколинеарни

Г) Никое от предишните твърдения

4. Окръжност с център О е външновписана за $\triangle ABC$, която се допира до страната *AB.* Ако $\sphericalangle AOB = 50^\circ$, мярката на $\sphericalangle ACB$ е:

А) 80° Б) 130° В) 100° Г) Не може да се определи

5. Графиката на коя от функциите е изобразена на чертежа?



А) $y = x^2 + 4x - 3$

Б) $y = -x^2 - 4x - 3$

В) $y = -x^2 + 4x - 3$

Г) $y = x^2 - 4x - 3$

6. Системата $\begin{vmatrix} x+y+x^2+y^2=32 \\ xy+x^2+y^2=19 \end{vmatrix}$ има:

А) 1 решение Б) 2 решения В) 3 решения Г) 4 решения

7. Точките M и P са средите съответно на страните AB и AC на $\triangle ABC$ с медицентър G. Ако $S_{\triangle MPG}=a$, то лицето на $\triangle ABC$ е:

А) $6a$ Б) $12a$ В) $\frac{32}{3}a$ Г) Не може да се определи

8. При $x\in(0;+\infty)$ изразът $B=\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}$ е тъждествено равен на:

А) $x+1$ Б) $x-1$ В) $\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1}$ Г) $\frac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{x-\sqrt{x}+1}$

9. Кои от дадените редици с общ член a_n: (1) $a_n=4.\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$, (2) $a_n=4.\left(\frac{4}{5}\right)^{2n-1}$,

(3) $a_n=\frac{1}{n^2-2n+4}$, (4) $a_n=\left(-1\right)^{n-1}.\left(n^2+1\right)$, (5) $a_n=\sqrt{n^2-n}-2$ са намаляващи ?

А) (2) и (4) Б) (2), (3) и (4) В) (1) и (5) Г) (2) и (3)

10. Броят на членовете на аритметична прогресия с положителни членове, за която

$$\begin{aligned} &a_5-a_2=12 \\ &a_5+a_1a_4=46 \\ &S_n-a_2-a_7=256 \end{aligned}$$ е:

А) 14 Б) 10 В) 12 Г) Друг отговор

11. Кои от посочените тъждества са верни за членовете $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ на геометрична прогресия

(1) $\left(a_1+a_2+a_3\right).\left(a_1-a_2+a_3\right)=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ (2) $\left(a_1-a_3\right)^2+\left(a_2-a_3\right)^2+\left(a_2-a_4\right)^2=\left(a_1-a_4\right)^2$

(3) $\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(a_1^2+a_3^2+a_4^2\right)=\left(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4\right)^2$?

А) (1) и (3) Б) (1) и (2) В) (2) и (3) Г) (1), (2) и (3)

12. За всеки остър ъгъл α стойността на израза

$$\frac{1-\sin^2\left(90°-\alpha\right)+\cot g^2\left(90°+\alpha\right).\cos^2\alpha}{\cos^2\left(90^\circ-\alpha\right)}-\frac{1}{4}.tg\alpha.tg\left(90°+\alpha\right)$$ е:

А) $1\frac{3}{4}$ Б) 2 В) $2\frac{1}{4}$ Г) 1

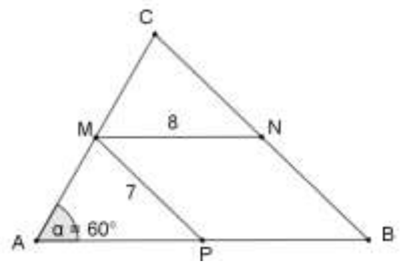
13. В правоъгълен $\triangle ABC$ $\sphericalangle ABC = 90°$, $\sphericalangle CAB = 30°$. Върху страната AB е избрана точка P, такава че $AP = 4\ cm$ и $\sphericalangle CPB = 50°$. Дължината на CB (в cm) е равна на:

А) $\dfrac{2tg50°}{\sin 20°}$ Б) $\dfrac{2\cos 50°}{\sin 20°}$ В) $\dfrac{2\sin 40°}{\sin 20°}$ Г) $\dfrac{2\sin 50°}{\sin 20°}$

14. Намерете радиуса на окръжността, описана около равнобедрен трапец с основи 9 cm и 3 cm и ъгъл при голямата основа, равен на 60º.

А) $3\sqrt{3}$ cm Б) $\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$ cm В) 6 cm Г) $\sqrt{21}$ cm

15.



В остроъгълния $\triangle ABC$ средните отсечки MN и MP имат дължини съответно 8 cm и 7 cm, $\measuredangle BAC = 60°$. Периметърът на $\triangle ABC$ (в cm) равен на:

А) 40 Б) 36 В) 44 Г) Друг отговор

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачи 16 и 17 запишете в листа за отговори на указаните за това места</u>

16. С цифрите 0,1,4,5,6,7и 8 са написани всички четирицифрени числа с различни цифри. Избрано е произволно число. Намерете вероятността това число да се дели на 9.

17. Даден е $\triangle ABC$**,** за страните на който са изпълнени равенствата

$$AB^2 = BC^2 + AB.AC$$
$$AC^2 = BC^2 + AB.BC$$

Да се докаже, че А) $AB > AC > BC$

Б) $\sphericalangle C = 2.\sphericalangle B = 4.\sphericalangle A$.

Ключ с верните отговори 10 клас, 2026 г.

№ на задача	Отговор	Брой точки
1	Б	4
2	В	4
3	А	4
4	А	4
5	В	4
6	Г	4
7	Б	4
8	Б	4
9	Г	4
10	В	4
11	Б	4
12	В	4
13	Г	4
14	Г	4
15	А	4
16		20 точки
	$P=\frac{84}{720}=\frac{7}{60}$ В примерното решение е показано примерно разпределение на точките.	
17		20 точки
17 А)	Както е показано в примерното решение	2 точки
17 Б)	Както е показано в примерното решение	18 точки

Общ брой точки от целия тест 100.

Примерно решение на задача 16 с разпределение на точките:

Броят на всички четирицифрени числа с различни цифри, записани с цифрите 0,1,4,5,6,7 и 8 са

n= 6.6.5.4=720. ………………………………………………………3 точки

Пресмятане на броя на числата, които се делят на 9:

С цифрите 0, 4, 6 и 8 могат да се запишат 3.3.2.1 = 18 числа. …..... ……………..3 точки

С цифрите 8, 5, 4 и 1 могат да се запишат 4! = 4.3.2.1= 24 числа. …….. ……….3 точки

С цифрите 7, 6, 5, и 0 могат да се запишат 3.3.2.1 = 18 числа. …………………3 точки

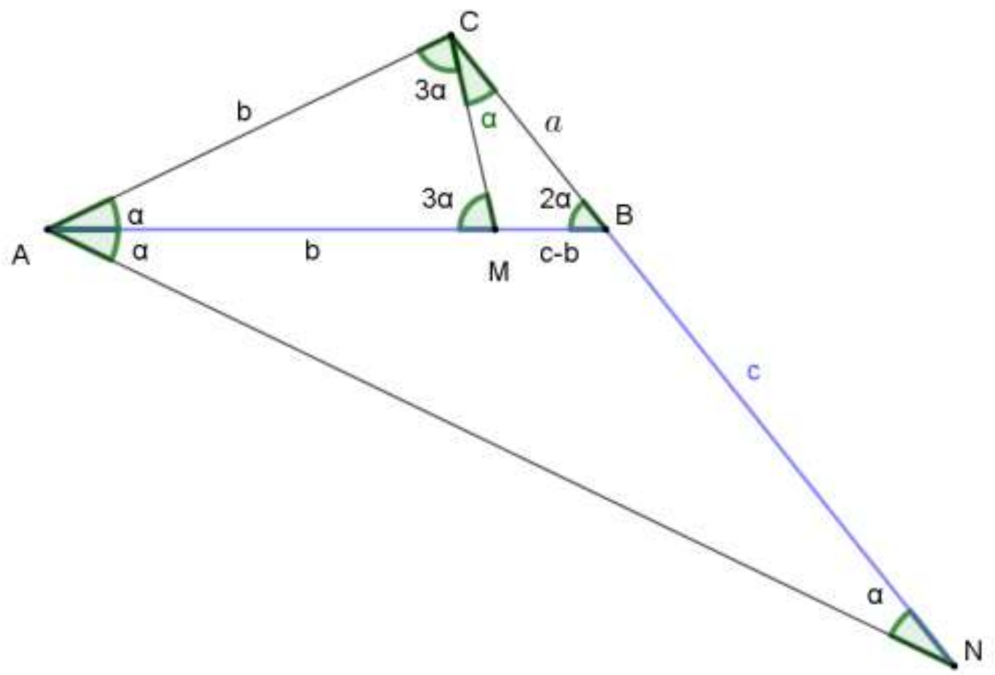
С цифрите 7, 6, 4 и 1 могат да се запишат 4!= 4.3.2.1= 24 числа. ………………….3 точки

Броят на всички такива числа е 18.2 +24.2 = 84 числа. ………................ 1 точка

Търсената вероятност е $P=\frac{84}{720}=\frac{7}{60}$ ……………………… 4 точки

Общо 20 точки

Примерно решение на задача 17 с разпределение на точките:



А) Въвеждаме стандартните означения за елементите на триъгълника $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$ $\sphericalangle BAC = \alpha.$ Неравенството, което трябва да докажем е $c > b > a$.

Дадените равенства $\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AB.AC \\ AC^2 &= BC^2 + AB.BC \end{aligned}$ записваме във вида $\begin{aligned} c^2 &= a^2 + cb \quad (1) \\ b^2 &= a^2 + ca \quad (2) \end{aligned}$

От (2) следва, че $b^2 > a^2 \Rightarrow b > a$ (3) ……………1 точка

и $a^2 = b^2 - ca$.

Следователно $c^2 = b^2 - ca + cb = b^2 + c(b-a) \Rightarrow c^2 > b^2 \Rightarrow c > b$ (4)

От (4) и (3) получаваме $c > b > a$. ………………… ……………………. …. 1 точка

Б) Върху страната АВ построяваме точка М такава, че $AM = AC = b$ ……………. 3 точки

и върху лъча $\overrightarrow{CB}$ точка N, такава че $BN = AB = c$ ………………………… ……3 точки

От (2) получаваме $b^2 = a(a+c)$. Следователно $\dfrac{b}{a+c} = \dfrac{a}{b}$ т.е. $\dfrac{CA}{CN} = \dfrac{CB}{AC}$. (5)

Тъй като $\sphericalangle ACB$ е общ за $\triangle ABC$ и $\triangle ANC$, от (5) следва, че $\triangle ABC \sim \triangle NAC$ по II признак…3 точки

Следователно $\sphericalangle N = \sphericalangle BAC = \alpha$ ……………………………………………………1 точки

$\triangle ABN$ е равнобедрен по построение и следователно $\sphericalangle NAB = \sphericalangle N = \alpha$ ……………..0,5 точки

$\sphericalangle ABC$ е външен за $\triangle ABN$. Следователно $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BNA + \sphericalangle\sphericalangle BAN = 2\alpha = 2\sphericalangle A$.… 1 точка

От (1) получаваме $c^2 - cb = a^2$

$$c(c-b)=a^2$$

$$\frac{c}{a}=\frac{a}{c-b} \quad \text{т.е.} \quad \frac{AB}{CB}=\frac{CB}{MB},$$

което заедно с общия ъгъл $\sphericalangle ABC$ ни дава , че $\triangle ABC \sim \triangle CBM$ по II признак………….3 точки

и следователно $\sphericalangle MCB=\alpha$ ……………………………………………..……………… ..1 точка

$\sphericalangle AMC$ е външен за $\triangle MBC$.Следователно $\sphericalangle AMC=\sphericalangle MBC+\sphericalangle BCM=2\alpha+\alpha=3\alpha$ ……1 точка

$\triangle AMC$ е равнобедрен по построение и следователно $\sphericalangle ACM=\sphericalangle AMC=3\alpha$ ……..…..0,5 точки

$\sphericalangle ACB=\sphericalangle ACM+\sphericalangle MCB=3\alpha+\alpha=4\alpha=4\sphericalangle A$ …………………………….……………..0,5 точки

Следователно $\sphericalangle ACB=2\sphericalangle ABC=4\sphericalangle CAB$ ……………………………………………...0,5 точки